

XII. ANALYTICKÁ GEOMETRIE KVADRATICKÝCH ÚTVARŮ

§1. Transformace souřadných soustav

Pozn.: V dalším budeme studovat kvadratické útvary v E_2 , v níž bude dána buď ASS určená počátkem a dvěma lineárně nezávislými vektory, nebo KSS, kdy jsou báze vektory navíc navzájem kolmé a jednotkové.

Pozn.: Necht' $(P, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ je ASS (1), $P[0;0]_{(1)}$, $\vec{e}_1(1;0)_{(1)}$, $\vec{e}_2(0;1)_{(1)}$.

Platí: $X = [x, y]_{(1)} \Leftrightarrow \overrightarrow{PX} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$

$\vec{u} = (u_1, u_2)_{(1)} \Leftrightarrow \vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2$

Necht' $(Q, \vec{u}, \vec{v})$ je ASS (2), $Q[0;0]_{(2)}$, $\vec{u}(1;0)_{(2)}$, $\vec{v}(0;1)_{(2)}$,

$Q[q_1, q_2]_{(1)}$, $\vec{u}(u_1, u_2)_{(1)}$, $\vec{v}(v_1, v_2)_{(1)}$

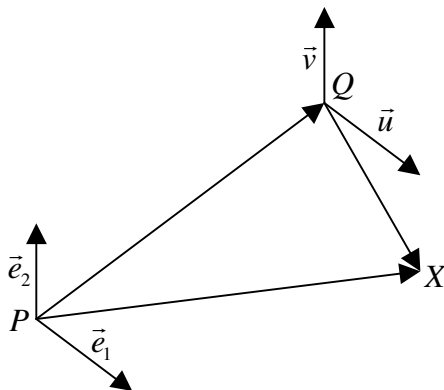
Platí: $\overrightarrow{PQ} = q_1 \vec{e}_1 + q_2 \vec{e}_2$

$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2$

$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$

Necht' $X[x, y]_{(1)}$, $X[x', y']_{(2)}$ je libovolný bod v E_2 .

Platí: $\overrightarrow{QX} = x' \vec{u} + y' \vec{v}$



Platí: $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QX}$

Dosazení: $x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 = q_1 \vec{e}_1 + q_2 \vec{e}_2 + x' \vec{u} + y' \vec{v} = q_1 \vec{e}_1 + q_2 \vec{e}_2 + x'(u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2) + y'(v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) = \vec{e}_1(q_1 + x'u_1 + y'v_1) + \vec{e}_2(q_2 + x'u_2 + y'v_2)$

$\vec{e}_1$: $x = q_1 + x'u_1 + y'v_1$

$\vec{e}_2$: $y = q_2 + x'u_2 + y'v_2$

někdy píšeme společně: $\boxed{X = Q + x' \vec{u} + y' \vec{v}}$

V.1.1.: Necht' $(P, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ je ASS (1), $(Q, \vec{u}, \vec{v})$ je ASS (2); $Q[q_1, q_2]_{(1)}$, $\vec{u}(u_1, u_2)_{(1)}$, $\vec{v}(v_1, v_2)_{(1)}$, $\vec{e}_1(1;0)_{(1)}$, $\vec{e}_2(0;1)_{(1)}$. Necht' $X \in E_2$; $X[x, y]_{(1)}$, $X[x', y']_{(2)}$.

Pak souřadnice bodu X v soustavách (1), (2) jsou vázány vztahy:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= q_1 + x'u_1 + y'v_1 \\ y &= q_2 + x'u_2 + y'v_2 \end{aligned}}$$

[Dk. V předchozí poznámce]

Def.: Rovnice z V.1.1. nazýváme transformačními rovnicemi mezi souřadnými soustavami (1) a (2) pro souřadnice bodu.

Pozn.: Transformační rovnice zapsané maticovou rovnicí:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\text{Označme } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X, \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = Q, \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = A, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = X' \Rightarrow X = Q + A \cdot X'.$$

Matice A se nazývá maticí přechodu od soustavy (2) k soustavě (1).

Matice A je vždy regulární (tzn. $|A| \neq 0$), neboť $\vec{u}, \vec{v}$ jsou lineárně nezávislé.

Pozn.: Násobení matic:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 3 + d \cdot 4 & a \cdot 5 + b \cdot 6 + c \cdot 7 + d \cdot 8 \\ e \cdot 1 + f \cdot 2 + g \cdot 3 + h \cdot 4 & e \cdot 5 + f \cdot 6 + g \cdot 7 + h \cdot 8 \\ i \cdot 1 + j \cdot 2 + k \cdot 3 + l \cdot 4 & i \cdot 5 + j \cdot 6 + k \cdot 7 + l \cdot 8 \end{pmatrix}$$

Násobení matic není komutativní, násobit je možné pouze ty matice, z nichž první matice má stejný počet sloupců jako druhá matice řádků.

Př.: Maticovými operacemi vyjádřete nové souřadnice pomocí starých.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \Bigg/ \cdot \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1} \text{ zleva, neboť } A^{-1} \cdot A = E$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{u_1 v_2 - u_2 v_1}_{|A|}} \cdot \begin{pmatrix} v_2 & -u_2 \\ -v_1 & u_1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \begin{pmatrix} v_2 & -v_1 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dosazení: } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} & \frac{-v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \\ \frac{-u_2}{u_2 v_1 - u_1 v_2} & \frac{u_1}{u_2 v_1 - u_1 v_2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right]$$

Pozn.: Odvození transformačních rovnic pro souřadnice vektoru:

Dáno: $\langle P, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle - (1), \langle Q, \vec{u}, \vec{v} \rangle - (2), Q[q_1, q_2]_{(1)}, \vec{u}(u_1, u_2)_{(1)}, \vec{v}(v_1, v_2)_{(1)}$

libovolný vektor $\vec{w} = (w_1, w_2)_{(1)} = (w'_1, w'_2)_{(2)}$

$$\begin{aligned} \vec{w} &= w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2 = w'_1 \vec{u} + w'_2 \vec{v} = w'_1 (u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2) + w'_2 (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) = \\ &= \vec{e}_1 (w'_1 u_1 + w'_2 v_1) + \vec{e}_2 (w'_1 u_2 + w'_2 v_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1: \quad w_1 &= w'_1 u_1 + w'_2 v_1 \\ \vec{e}_2: \quad w_2 &= w'_1 u_2 + w'_2 v_2 \end{aligned}$$

§2. Definice kuželosečky

Def.: Necht' v E_2 je dána ASS $\langle P, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$.

Necht' je dána rovnice $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ (*), kde

$$a_{ij} \in R; i, j \in \{1, 2, 3\}, a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0 \left([a_{11}, a_{12}, a_{22}] \neq [0, 0, 0] \right).$$

Pak množinu všech bodů $X[x, y] \in E_2$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici (*), nazýváme kuželosečkou.

Pozn.: a) Jsou-li dány 2 rovnice, které se liší jen reálným násobkem, jsou považovány za 2 rovnice téže kuželosečky.

b) Jsou-li dány 2 rovnice typu (*) aniž by jedna byla násobkem druhé, pak příslušné kuželosečky považujeme za různé, i kdyby měly stejnou množinu řešení (např. $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow \text{bod } [0; 0]$, $2x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow \text{bod } [0; 0]$).

Pozn.: Necht' A je čtvercová matice řádu n . Jestliže pro všechny prvky $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $a_{ij} = a_{ji}$, pak matici A nazveme symetrickou (prvky symetrické podle hlavní diagonály jsou stejné).

Def.: Necht' k je kuželosečka daná rovnicí (*). Symetrickou matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ nazveme maticí kuželosečky k .

Pozn.: Maticový zápis rovnice kuželosečky:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Pozn.: Vyhovují-li rovnici kuželosečky souřadnice alespoň jednoho bodu, nazýváme kuželosečku bodově reálnou.

Nevyhovují-li rovnici kuželosečky souřadnice žádného bodu, nazýváme kuželosečku formálně reálnou.

§3. Průsečík přímky s kuželosečkou

Pozn.: Je dána kuželosečka $k : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ a přímka $p : p(B, \vec{u})$

$$B[b_1, b_2], \vec{u}(u_1, u_2)$$

$$x = b_1 + tu_1, y = b_2 + tu_2$$

$$x^2 = b_1^2 + 2tb_1u_1 + t^2u_1^2$$

$$y^2 = b_2^2 + 2tb_2u_2 + t^2u_2^2$$

$$xy = b_1b_2 + t(b_1u_2 + b_2u_1) + t^2 \cdot u_1u_2$$

Roznásobením a vytknutím t^2, t^1, t^0 získáváme rovnici $At^2 + 2Bt + c = 0$

- Diskuze: 1) $A = 0 \Rightarrow 2Bt + C = 0$: a) $B \neq 0: t = -\frac{C}{2B} - 1$ řešení, kuželosečka má s přímkou 1 společný bod
 b) $B = 0$:
 i) $C \neq 0: 0t \neq 0 \Rightarrow$ kuželosečka nemá s přímkou společný bod
 ii) $C = 0: 0t = 0 \Rightarrow$ každý bod kuželosečky leží na přímce
 2) $A \neq 0: D = 4B^2 - 4AC = 4(B^2 - AC)$
 a) $B^2 > AC \Rightarrow D > 0 \Rightarrow$ 2 společné body
 b) $B^2 = AC \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$ 1 společný bod
 c) $B^2 < AC \Rightarrow D < 0 \Rightarrow$ žádný společný bod

§4. Kanonický tvar rovnice kuželosečky

V.4.1.1.: Necht' $k: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ je kuželosečka.

Každou kuželosečku lze vhodnou transformací souřadné soustavy převést na jeden z následujících 9 tvarů, které nazýváme kanonickými rovnicemi kuželosečky:

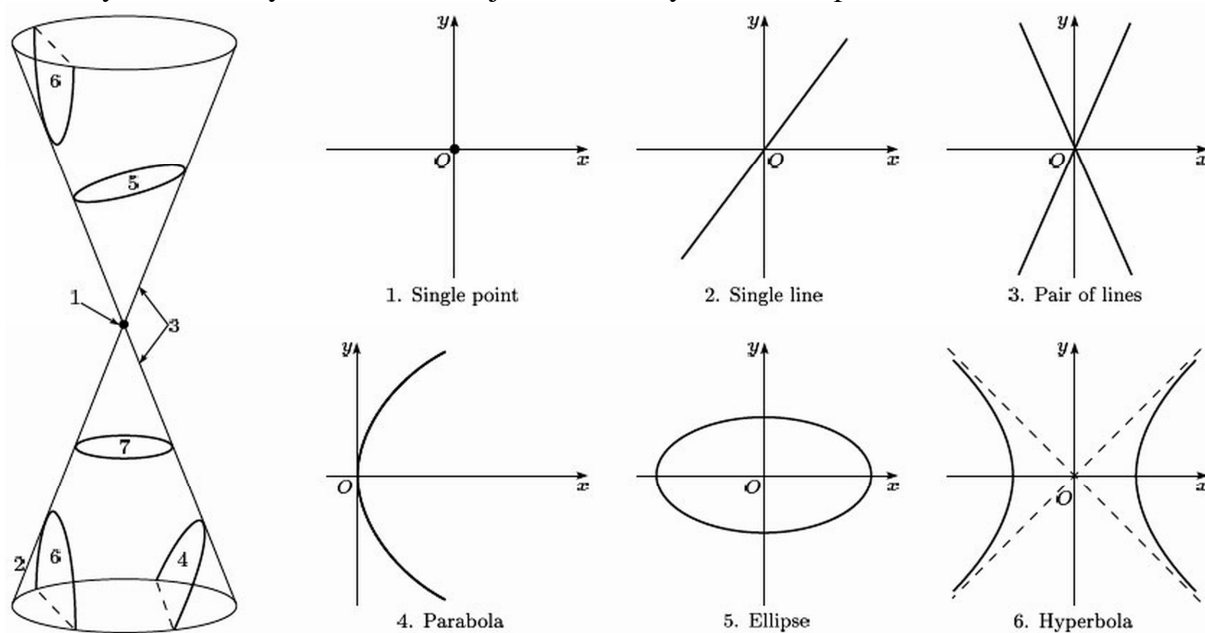
- (1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- (2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
- (3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- (4) $y^2 = 2px, p > 0$
- (5) $y^2 = k^2x^2, k > 0$
- (6) $y^2 = -k^2x^2, k > 0$
- (7) $y^2 = r^2, r > 0$
- (8) $y^2 = -r^2, r > 0$
- (9) $y^2 = 0$

[Dk.: členu s xy se zbavíme otočením soustavy souřadnic, všechny ostatní členy upravíme posunutím kuželosečky.]

Def.: Kuželosečku o rovnici (1) nazveme elipsou, čísla a, b poloosami elipsy (obr.5).
 Kuželosečku o rovnici (2) nazveme imaginární elipsou (kuželosečka formálně reálná).
 Kuželosečku o rovnici (3) nazveme hyperbolou, čísla a, b poloosami hyperboly (obr.6).
 Kuželosečku o rovnici (4) nazveme parabolou, číslo p parametr paraboly (obr.4).
 Kuželosečka o rovnici (5) jsou 2 různoběžky (obr.3).
 Kuželosečka o rovnici (6) je bod (obr.1).
 Kuželosečka o rovnici (7) jsou 2 různé rovnoběžky (řez roviny válcovou plochou).
 Kuželosečka o rovnici (8) je prázdná množina (2 imaginární rovnoběžky), (kuželosečka formálně reálná).
 Kuželosečka o rovnici (9) je dvojná přímka (obr.2).

Def.: Speciálním případem elipsy pro $a = b$ je kružnice.

Pozn.: Všechny kuželosečky můžeme získat jako řez roviny kuželovou plochou.



Def.: Necht' k je kuželosečka, A její matice.

Kuželosečku nazýváme regulární $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ (tedy matice A je regulární).

Kuželosečku nazýváme singulární $\Leftrightarrow |A| = 0$ (tedy matice A je singulární).

Pozn.: Kuželosečky 1.-4. z V.4.1. jsou regulární, 5.-9. singulární.